5 Schaltalgebra

5.1 Verknüpfungszeichen der Schaltalgebra

Die Grundlage der digitalen Schaltungstechnik bildet eine zwei-elementige **Boolesche Algebra** auf der Menge B := { 0 , 1 } mit den Verknüpfungen:

* *Konjunktion*

$$B \times B \ 6 \ B \quad , \quad (x,y) \ \mu \ x \ ¸ \ y$$

Verknüpfungstabelle:

x	y	x **v** y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* *Disjunktion*

$$B \times B \ 6 \ B \quad , \quad (x,y) \ \mu \ x \ ° \ y$$

Verknüpfungstabelle:

x	y	x **w** y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

* Negation

$$B \ 6 \ B \quad , \quad x \ \mu \ \overline{x}$$

Verknüpfungstabelle:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Die algebraische Struktur (B; v, w, G) wird als Schaltalgebra bezeichnet - C. Shannon (1938).

Eine Schaltfunktion (logische Funktion) ist eine eindeutige Zuordnungsvorschrift, die jeder der 2^n Wertekombinationen der Schaltvariablen (binäre oder logische Variablen) x_1, x_2,..., x_n, x_i 0 {0,1} (i=1(1)n) eindeutig einen Funktionswert

$$y = f(x_1,x_2,...,x_n) \ 0 \ \{0,1\}$$

zuweist.

Logische Verknüpfungszeichen (DIN 66000):

Verknüpfung	Symbol	Beispiel	
Negation	& , ¬	A , ¬A	nicht A
Konjunktion, UND-Verknüpf.	v	A v B	A und B
Disjunktion, ODER-Verknüpf.	w	A w B	A oder B
NAND-Verknüpf.	v	A v B A v B	A nand B, nicht(A und B)
NOR-Verknüpf.	w	A w B A w B	A nor B, nicht(A oder B)
Implikation	6	A 6 B	A Pfeil B
Äquivalenz	76	A 76 B	A Doppelpfeil B
Antivalenz, Exklusiv-ODER, XOR-Verknüpf.	76	A 76 B	A xor B

Nicht genormte Verknüpfungszeichen:

" C " für v (Und),

" + " für w (Oder),

" / " für : (Äquivalenz),

" / , r " für : (XOR).

Vorrangregeln:

wachsende
Priorität

8

	Negation (stärkste Bindung)
	UND, ODER, NAND, NOR
	XOR, Implikation, Äquivalenz

Beachte:
Da beispielsweise die Verknüpfungen UND und ODER die gleiche Priorität besitzen, müssen innerhalb einer Gleichung Klammern gesetzt werden!

Als abkürzende Schreibweise bezeichnet man das Weglassen des Verknüpfungszeichens bei der direkten UND-Verknüpfung logischer Variablen, z.B.:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3) = x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3$$

DIN 66000 *abkürzende Schreibweise*

Verknüpfungstabellen

$y = f(x_1, x_2)$

Arbeitstabelle:

x_1	x_2	y
0 V	0 V	0 V
0 V	4 V	4 V
4 V	0 V	4 V
4 V	4 V	4 V

Pegeltabelle:

x_1	x_2	y
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

Wahrheitstabellen:

Positive Logik

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ODER - Verknüpfung

Negative Logik

x_1	x_2	y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

UND - Verknüpfung

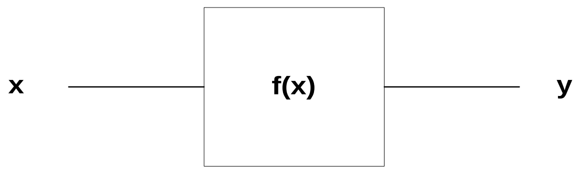
5.2 Logische Funktionen

Für n binäre Eingangsvariablen gibt es 2^n verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, so daß für eine binäre Ausgangsgröße die Anzahl der möglichen Funktionen gleich

$$2^{2^n}$$

ist.

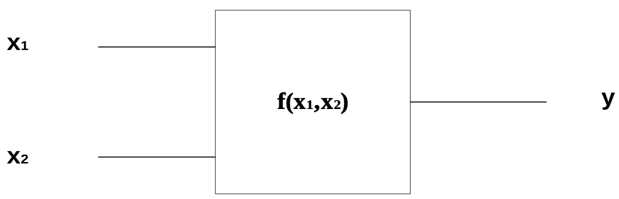
*** Funktionen für eine Eingangsvariable:**



$$y_i = f_i(x) \quad , \quad i = 0,1,2,3$$

x	0	1	***Logische Funktion***	***Bezeichnung***
y_0	0	0	$y_0 = 0$	Konstante 0
y_1	0	1	$y_1 = x$	Abbild, Treiber
y_2	1	0	$y_2 = \neg x$	Negation
y_3	1	1	$y_3 = 1$	Konstante 1

Logische Funktionen für zwei Eingangsvariablen:



$$y_i \;'\; f_i(x_1,x_2) \quad , \quad i \;'\; 0,1,...,15$$

X1 X2	1 0 1 0 1 1 0 0	***Logische Funktion***	***Bezeichnung***
Y0	0 0 0 0	Y0 = 0	Konstante 0
Y1	0 0 0 1	Y1 = X1 w X2 = X1 w X2	NOR
Y2	0 0 1 0	Y2 = X1X2 = X1 v X2	Inhibition
Y3	0 0 1 1	Y3 = X2	Negation X2
Y4	0 1 0 0	Y4 = X1X2	Inhibition
Y5	0 1 0 1	Y5 = X1	Negation X1
Y6	0 1 1 0	Y6 = X1 <-> X2 = X1X2 w X1X2	XOR
Y7	0 1 1 1	Y7 = X1 v X2 = X1 v X2	NAND
Y8	1 0 0 0	Y8 = X1 v X2 = X1X2	UND
Y9	1 0 0 1	Y9 = X1 <-> X2 = X1X2 w X1X2	Äquivalenz
Y10	1 0 1 0	Y10 = X1	Identität X1
Y11	1 0 1 1	Y11 = X2 -> X1 = X1 w X2	Implikation
Y12	1 1 0 0	Y12 = X2	Identität X2
Y13	1 1 0 1	Y13 = X1 -> X2 = X1 w X2	Implikation
Y14	1 1 1 0	Y14 = X1 w X2	ODER
Y15	1 1 1 1	Y15 = 1	Konstante 1

Besondere praktische Relevanz besitzen die Funktionen UND, ODER, NEGATION, NAND, NOR und XOR!

Die Darstellung einzelner logischer Funktionen über die Grundverknüpfungen NEGATION, UND und ODER läßt sich anhand einer Wertetabelle überprüfen.

<u>Beispiel:</u>

$$y6 \ ' \ x1 \ 7|6 \ x2 \ ' \ x1\overline{x2} \ ^{\circ} \ \overline{x1}x2$$

$x1$	$x2$	$x1\overline{x2}$	$\overline{x1}x2$	$x1\overline{x2} \ ^{\circ} \ \overline{x1}x2$	$y6$
1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

#

Alle logischen Verknüpfungen für zwei Schaltvariablen lassen sich durch Konjunktion, Disjunktion und Negation darstellen!!

<u>Def.:</u>

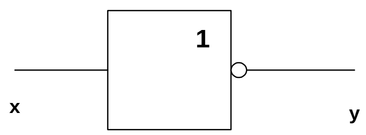
Ein System F von Verknüpfungen heißt *Verknüpfungsbasis* für eine Funktionsmenge F, wenn sich jede Funktion f 0 F mit diesen Verknüpfungen allein darstellen läßt.

F = { & , v , w } bildet eine Verknüpfungsbasis für { y0, y1,...,y15 }.

5.3 Schaltsymbole der Grundverknüpfungen

*** Negation (NICHT - Verknüpfung)**

<u>Schaltsymbol - DIN 40900:</u>



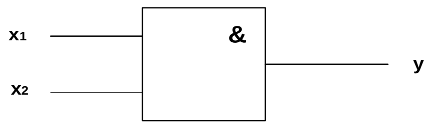
<u>Funktion:</u>

$$y = \bar{x} = \neg x$$

<u>Wahrheitstabelle:</u>

x	y
0	1
1	0

*** Konjunktion (UND - Verknüpfung)**

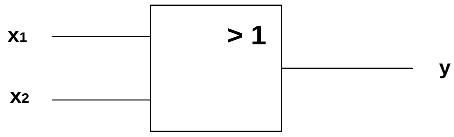


$$y = x_1 x_2 = x_1 \vee x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\rightarrow$ *n Eingangsvariablen*: $y = x_1 x_2 \ldots x_n$

* Disjunktion (ODER - Verknüpfung)

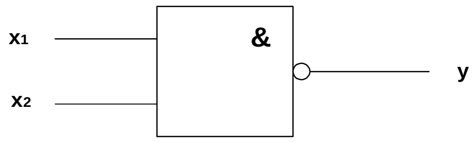


$$y = x_1 \vee x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

n Eingangsvariablen: $y = x_1 \vee x_2 \vee \; . \; . \; . \vee x_n$

* NAND - Verknüpfung (NOT AND - / NICHT UND - Verknüpfung)

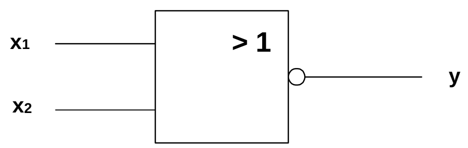


$$y = \overline{x_1 x_2} = x_1 \,\overline{\vee}\, x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

n Eingangsvariablen: $y = \overline{x_1 \, x_2 \; . \; . \; . \; x_n}$

* NOR - Verknüpfung (NOT OR - / NICHT ODER - Verknüpfung)

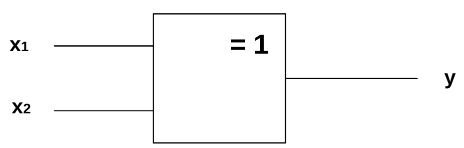


$$y = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \overline{\vee} x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

n Eingangsvariablen: $y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \ . \ . \ . \vee x_n}$

* XOR - Verknüpfung (EXKLUSIV ODER - / ANTIVALENZ - Verknüpfung)



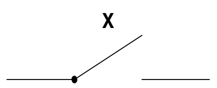
$$y = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 \vee x_1\, \overline{x_2}$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5.4 Regeln der Schaltalgebra

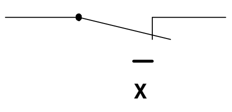
Elementarverknüpfungen		
NICHT	**UND**	**ODER**
$\overline{1}$ ' 0	0 v 0 ' 0	0 w 0 ' 0
$\overline{0}$ ' 1	0 v 1 ' 0	0 w 1 ' 1
	1 v 0 ' 0	1 w 0 ' 1
	1 v 1 ' 1	1 w 1 ' 1

Zur Erläuterung der Regeln der Algebra lassen sich einfache Serien- und Parallelschaltungen verwenden; hierbei bildet



einen **Schliesser** (Arbeitskontakt), wobei
x = 0 zu *Schalter geöffnet* und
x = 1 zu *Schalter geschlossen* korrespondiert,

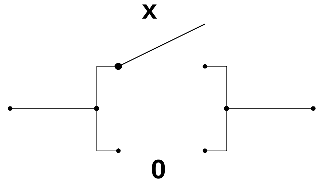
und



einen **Öffner** (Ruhekontakt), für
x = 0 ist der *Schalter geschlossen* und
x = 1 bedeutet *Schalter geöffnet*.

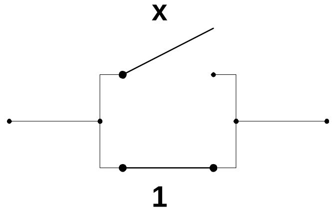
1.

x w 0 ' *x*



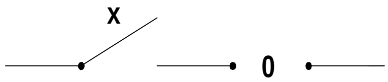
2.

x w 1 ' 1



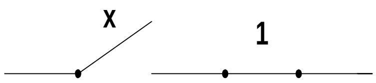
3.

x v 0 ' 0



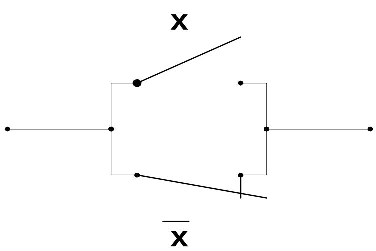
4.

x v 1 ' *x*



5.

x w $\bar{x}$ ' 1

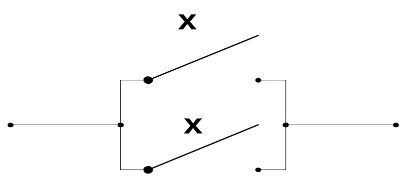


6.

x v *x* ' *x*

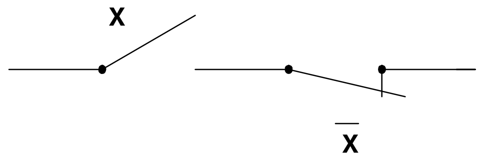
7.

x w *x* ' *x*



8.

x v $\overline{x}$ ' 0



9.

$\overline{x}$ ' x

10. Kommutative Gesetze

a)

$x1$ v $x2$ v $x3$ '$x2$ v $x1$ v $x3$ '$x3$ v $x2$ v $x1$ ' . . .

b)

$x1$ w $x2$ w $x3$ '$x2$ w $x1$ w $x3$ '$x3$ w $x2$ w $x1$ ' . . .

11. Assoziative Gesetze

a)

$x1$ v $x2$ v $x3$ '$x1$ v ($x2$ v $x3$) '($x1$ v $x2$) v $x3$

b)

$x1$ w $x2$ w $x3$ '$x1$ w ($x2$ w $x3$) '($x1$ w $x2$) w $x3$

12. Distributive Gesetze

a)

$x1$ w ($x2$ v $x3$) '($x1$ w $x2$) v ($x1$ w $x3$)

b)

$x1$ v ($x2$ w $x3$) '($x1$ v $x2$) w ($x1$ v $x3$)

13. De Morgansche Gesetze

a)

$$\overline{x1 \text{ v } x2 \text{ v } . . . \text{ v } xn} \text{ ' } \overline{x1} \text{ w } \overline{x2} \text{ w } . . . \text{ w } \overline{xn}$$

b)

$$\overline{x1 \text{ w } x2 \text{ w } . . . \text{ w } xn} \text{ ' } \overline{x1} \text{ v } \overline{x2} \text{ v } . . . \text{ v } \overline{xn}$$

14. Shannonsches Gesetz

$$\overline{f(x1 , x2 , . . . xn ; \text{v} , \text{w})} \text{ ' } f(\overline{x1} , \overline{x2} , . . . \overline{xn} ; \text{w v})$$

15. Kürzungsregeln

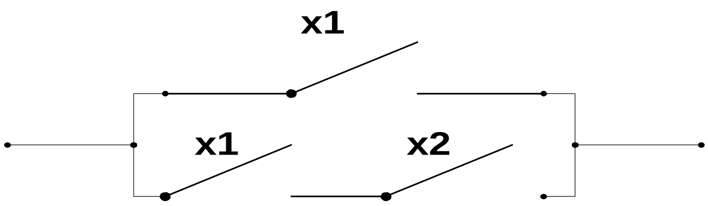
a)

$$x1 \text{ w } (x1 \text{ v } x2) \text{ ' } x1$$

denn

$$x1 \text{ w } (x1 \text{ v } x2) \text{ '}^{4.} (x1 \text{ v } 1) \text{ w } (x1 \text{ v } x2) \text{ '}^{12.}$$
$$\text{'}^{12.}\ x1 \text{ v } (1 \text{ w } x2) \text{ '}^{2.}\ x1 \text{ v } 1 \text{ '}^{4.}\ x1$$

bzw.



b)

$$x1 \text{ v } (x1 \text{ w } x2) \text{ ' } x1$$

$$[\ x1 \text{ v } (x1 \text{ w } x2) \text{ '}^{1.} (x1 \text{ w } 0) \text{ v } (x1 \text{ w } x2) \text{ '}^{12.}$$
$$\text{'}^{12.}\ x1 \text{ w } (0 \text{ v } x2) \text{ '}^{3.}\ x1 \text{ w } 0 \text{ '}^{1.}\ x1\ ]$$

c)

$$x1 \;\mathrm{w}\; (\overline{x1} \;\mathrm{v}\; x2) \;'\; x1 \;\mathrm{w}\; x2$$

$$x1 \;\mathrm{w}\; (\overline{x1} \;\mathrm{v}\; x2) \;'^{12.}\; (x1 \;\mathrm{w}\; \overline{x1}) \;\mathrm{v}\; (x1 \;\mathrm{w}\; x2) \;'^{5.}\; 1 \;\mathrm{v}\; (x1 \;\mathrm{w}\; x2) \;'^{4.}\; x1 \;\mathrm{w}\; x2$$

d)

$$x1 \;\mathrm{v}\; (\overline{x1} \;\mathrm{w}\; x2) \;'\; x1 \;\mathrm{v}\; x2$$

$$x1 \;\mathrm{v}\; (\overline{x1} \;\mathrm{w}\; x2) \;'^{12.}\; (x1 \;\mathrm{v}\; \overline{x1}) \;\mathrm{w}\; (x1 \;\mathrm{v}\; x2) \;'^{8.}\; 0 \;\mathrm{w}\; (x1 \;\mathrm{v}\; x2) \;'^{1.}\; x1 \;\mathrm{v}\; x2$$

e)

$$(x1 \;\mathrm{v}\; x2) \;\mathrm{w}\; (x1 \;\mathrm{v}\; \overline{x2}) \;'\; x1$$

$$[\; (x1 \;\mathrm{v}\; x2) \;\mathrm{w}\; (x1 \;\mathrm{v}\; \overline{x2}) \;'^{12.}\; x1 \;\mathrm{v}\; (x2 \;\mathrm{w}\; \overline{x2}) \;'^{5.}\; x1 \;\mathrm{v}\; 1 \;'^{4.}\; x1 \;]$$

f)

$$(x1 \;\mathrm{w}\; x2) \;\mathrm{v}\; (x1 \;\mathrm{w}\; \overline{x2}) \;'\; x1$$

$$[\; (x1 \;\mathrm{w}\; x2) \;\mathrm{v}\; (x1 \;\mathrm{w}\; \overline{x2}) \;'^{12.}\; x1 \;\mathrm{w}\; (x2 \;\mathrm{v}\; \overline{x2}) \;'^{8.}\; x1 \;\mathrm{w}\; 0 \;'^{1.}\; x1 \;]$$

16. Dualitätsprinzip

Mit jeder aus den Regeln der Schaltalgebra ableitbaren Aussage gilt auch die entsprechende Aussage, die sich bei Vertauschung von v mit w und 0 mit 1 ergibt - zwei derartige Aussagen heißen dual.

Der Grund hierfür ist die Struktur der Grundregeln:

$$a \;\mathrm{w}\; b \;\text{'}\; b \;\mathrm{w}\; a \quad , \quad a \;\mathrm{v}\; b \;\text{'}\; b \;\mathrm{v}\; a$$

$$a \;\mathrm{w}\; (b \;\mathrm{v}\; c) \;\text{'}\; (a \;\mathrm{w}\; b) \;\mathrm{v}\; (a \;\mathrm{w}\; c) \quad , \quad a \;\mathrm{v}\; (b \;\mathrm{w}\; c) \;\text{'}\; (a \;\mathrm{v}\; b) \;\mathrm{w}\; (a \;\mathrm{v}\; c)$$

$$a \;\mathrm{w}\; \overline{a} \;\text{'}\; 1 \quad , \quad a \;\mathrm{v}\; \overline{a} \;\text{'}\; 0$$

$$a \;\mathrm{w}\; 0 \;\text{'}\; a \quad , \quad a \;\mathrm{v}\; 1 \;\text{'}\; a$$

17. Negation von Schaltfunktionen

Die Negation einer Schaltfunktion ergibt sich über das Shannonsche Gesetz, indem man zur dualen Funktion übergeht und jede Variable einzeln negiert:

$$\overline{f(x1\,,\,x2\,,\,...\,xn\,;\,\mathrm{v}\,,\,\mathrm{w})} \;\text{'}\; f(\overline{x1}\,,\,\overline{x2}\,,\,...\,\overline{xn}\,;\,\mathrm{w}\;\mathrm{v})\;.$$

Beispiel:

$$y \;\text{'}\; (x1 \;\mathrm{w}\; x2 \;\mathrm{w}\; x3) \;\mathrm{v}\; (\overline{x1} \;\mathrm{w}\; x2 \;\mathrm{w}\; x3)$$

Duale Funktion:

$$y \;\text{'}\; (x1 \;\mathrm{v}\; x2 \;\mathrm{v}\; x3) \;\mathrm{w}\; (\overline{x1} \;\mathrm{v}\; x2 \;\mathrm{v}\; x3)$$

oder

$$y \;\text{'}\; x1\; x2\; x3 \;\mathrm{w}\; \overline{x1}\; x2\; x3$$

Negierte Funktion:

$$y \;\text{'}\; \overline{x1}\; \overline{x2}\; \overline{x3} \;\mathrm{w}\; x1\; \overline{x2}\; \overline{x3}$$

#

5.5 Logikstufen

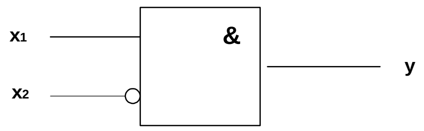
Allgemein bezeichnet man als Stufigkeit oder Verknüpfungstiefe einer digitalen Schaltung die Anzahl der Gatterstufen, die hintereinander geschaltet sind.

(i) <u>Einstufige Logik</u>

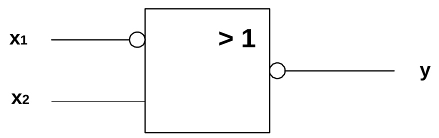
Eine digitale Schaltung ist einstufig, wenn zwischen Eingang und Ausgang nur eine Gatterstufe liegt; eine Negation am Ein- oder Ausgang wird allgemein nicht als separate Stufe gezählt!

Beispiele:

$$y = x_1 \bar{x}_2$$



$$y = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2}$$



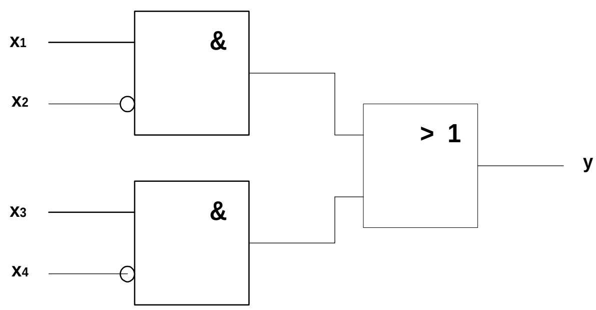
#

(ii) <u>Zweistufige Logik</u>

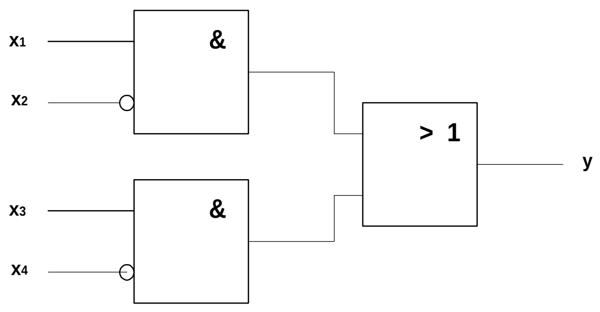
Eine digitale Schaltung ist zweistufig, wenn zwischen Ein- und Ausgang zwei Gatterstufen liegen.

Beispiel:

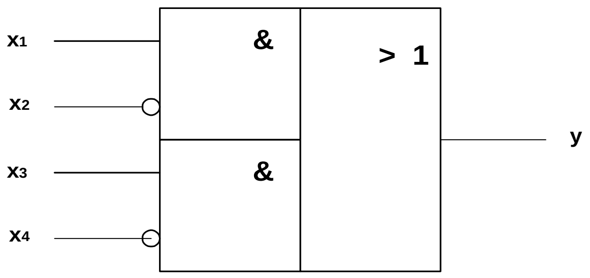
$$y = x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4$$



Vereinfachend stellt man die Schaltung



durch direktes Aneinanderfügen der Gatterstufen folgendermaßen dar:



(iii) <u>n-stufige Logik</u>

Eine digitale Schaltung ist n-stufig, wenn zwischen Eingang und Ausgang n Gatterstufen hintereinander geschaltet sind.

<u>Beachte:</u>

Die Verzögerungszeiten sämtlicher Stufen addieren sich!
Zeitkritische Schaltungen sollten auf einer zweistufigen Logik basieren.

5.6 Darstellung der Elementarverknüpfungen in NAND- und NOR-Technik

Die Elementarverknüpfungen NEGATION, UND sowie ODER lassen sich technisch durch die alleinige Verwendung von NAND-Gattern bzw. NOR-Gattern realisieren; d.h. { G , v } oder { G , w } stellen für sich allein Verknüpfungsbasen dar.

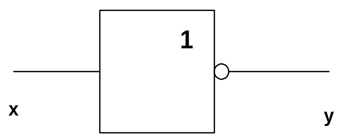
Die De Morganschen Gesetze

$$\overline{x \; v \; y} \; ' \; \overline{x} \; w \; \overline{y} \quad , \quad \overline{x \; w \; y} \; ' \; \overline{x} \; v \; \overline{y}$$

ermöglichen jeweils eine der beiden Verknüpfungen v bzw. w aus der Basis { G , v , w } zu entfernen.

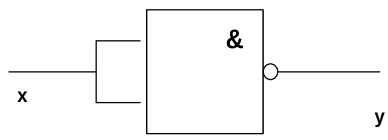
*** NEGATION**

$$y \; ' \; \overline{x}$$



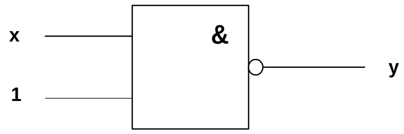
NAND-Technik:

$$y \; ' \; \overline{x \; v \; x} \qquad (\; Regel \; 6 \;)$$

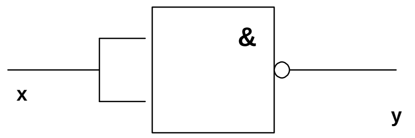


oder

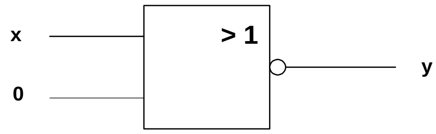
$$y \; ' \; \overline{x \; v \; 1} \qquad (\; Regel \; 4 \;)$$



NOR-Technik:



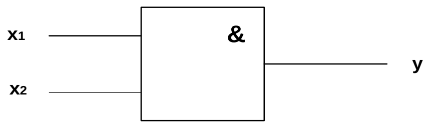
$y \ ' \ \overline{x \ w \ x}$ (*Regel* 7)



oder

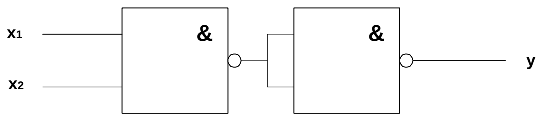
$y \ ' \ \overline{x \ w \ 0}$ (*Regel* 1)

*** UND-Verknüpfung (Konjunktion)**



$y \ ' \ x1 \ v \ x2$

NAND-Technik:



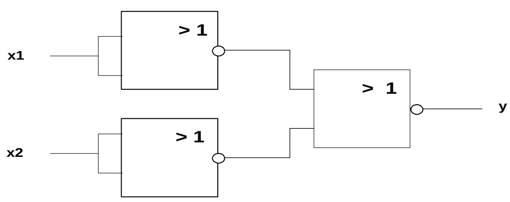
$y \ ' \ \overline{\overline{x1 \ v \ x2}}$ (*Regel* 9)

$y \ ' \ \overline{\overline{x1 \ v \ x2} \ v \ \overline{x1 \ v \ x2}}$ (*Regel* 6)

NOR-Technik:

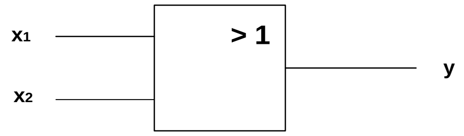
$y \ ' \ \overline{\overline{(x1 \ w \ x1) \ v \ (x2 \ w \ x2)}}$ (*Regel* 7 , 9)

$y \ ' \ \overline{\overline{(x1 \ w \ x1)} \ w \ \overline{(x2 \ w \ x2)}}$ (*Regel* 13)



* ODER - Verknüpfung (Disjunktion)

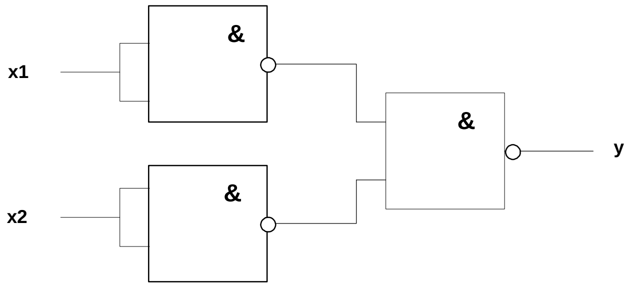
$y \; ' \; x1 \; w \; x2$



NAND - Technik:

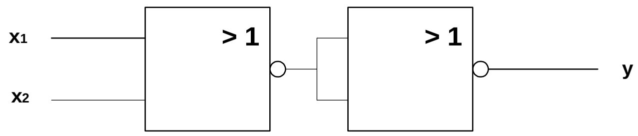
$$y \; ' \; \overline{(x1 \; v \; x1) \; w \; (x2 \; v \; x2)} \qquad (\; Regel \; 6 \; , \; 9 \;)$$

$$y \; ' \; \overline{\overline{\overline{x1 \; v \; x1} \; v \; \overline{x2 \; v \; x2}}} \qquad (\; Regel \; 13 \;)$$



NOR - Technik:

$$y \; ' \; \overline{\overline{x1 \; w \; x2}} \; ' \; \overline{\overline{x1 \; w \; x2} \; w \; \overline{x1 \; w \; x2}} \qquad (\; Regel \; 9 \; , \; 7 \;)$$

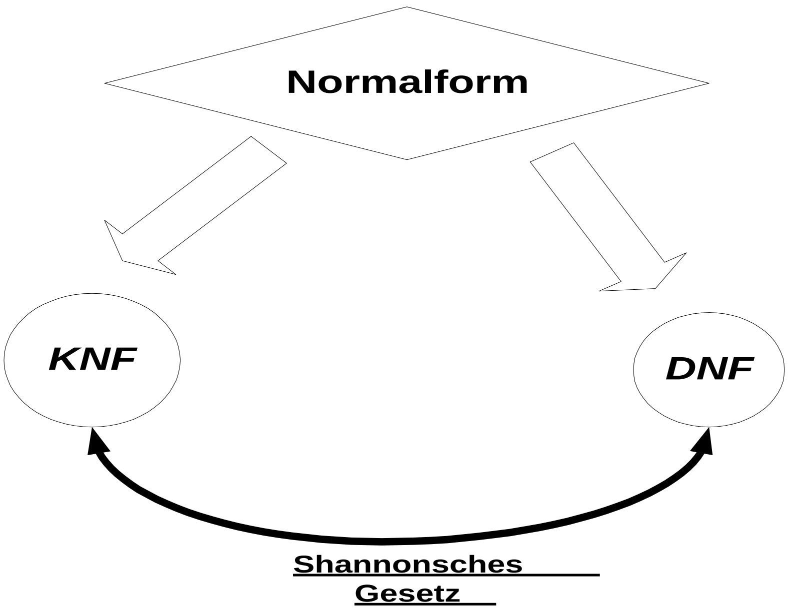


5.7 Normalformen, Minterme und Maxterme

Jede Schaltfunktion kann durch zwei gleichwertige Normalformen:

* KNF (konjunktive Normalform)
* DNF (disjunktive Normalform)

dargestellt werden - hierbei treten nur die Elementarverknüpfungen NEGATION, KONJUNKTION und DISJUNKTION auf.



Die Basiselemente der beiden Normalformen sind die Minterme für die DNF und die Maxterme für die KNF:

- Minterme (Vollkonjunktionen)

Minterme sind konjunktive Verknüpfungen aller Eingangsvariablen, bei denen jede Variable - negiert oder nichtnegiert - genau einmal auftritt.
Beispiel:

3 Variablen A , B , C;

$$A \vee \overline{B} \vee C \quad , \quad A \vee B \vee \overline{C} \quad , \quad A \vee B \vee C \quad , \ldots$$

- Maxterme (Volldisjunktionen)

Maxterme sind disjunktive Verknüpfungen aller Eingangsvariablen, bei denen jede Variable - negiert oder nichtnegiert - genau einmal auftritt.

Beispiel:

3 Variablen A , B , C;

$$A \mathrm{\ w\ } \overline{B} \mathrm{\ w\ } C \quad , \quad A \mathrm{\ w\ } B \mathrm{\ w\ } \overline{C} \quad , \quad \overline{A} \mathrm{\ w\ } \overline{B} \mathrm{\ w\ } C \quad , \ . \ . \ .$$

#

Im Falle von n Schaltvariablen lassen sich insgesamt 2^n Min- und Maxterme bilden!

<u>Minterme für zwei Eingangsvariablen:</u>

	x1 *x2*	*x1x2*	*x1x2*	*x1x2*	*x1x2*
0	0 0	1	0	0	0
1	0 1	0	1	0	0
2	1 0	0	0	1	0
3	1 1	0	0	0	1

Jeder Minterm wird nur für eine Kombination der Eingangsvariablen “1", für alle übrigen ist er “0".

Der Minterm mit dem Wert “1" entsteht durch konjunktive Verknüpfung aller Schaltvariablen, wobei die Eingangsvariablen mit dem Wert “0" negiert werden.

Maxterme für zwei Eingangsvariablen:

	x1 *x2*	*x1* w *x2*	*x1* w *x2*	*x1* w *x2*	*x1* w *x2*
0	0 0	0	1	1	1
1	0 1	1	0	1	1
2	1 0	1	1	0	1
3	1 1	1	1	1	0

Der Maxterm mit dem Wert “0” entsteht durch disjunktive Verknüpfung aller Schaltvariablen, wobei die Eingangsvariablen mit dem Wert “1"
negiert werden.

Bemerkung: Abkürzende Notation für Minterme

Jeder Minterm läßt sich eindeutig über die Bitkombination der Eingangsvariablen bzw. deren Dezimalwert identifizieren, z.B.:

(0) ' $\overline{x1}\,\overline{x2}$, (1) ' $\overline{x1}x2$, (2) ' $x1\overline{x2}$, (3) ' $x1x2$.

Min- und Maxterme für drei Eingangsvariablen:

	x1 x2 x3	Minterm	Maxterm
0	0 0 0	$\overline{x1}\,\overline{x2}\,\overline{x3}$	$x1$ w $x2$ w $x3$
1	0 0 1	$\overline{x1}\,\overline{x2}\,x3$	$x1$ w $x2$ w $\overline{x3}$
2	0 1 0	$\overline{x1}\,x2\,\overline{x3}$	$x1$ w $\overline{x2}$ w $x3$
3	0 1 1	$\overline{x1}\,x2\,x3$	$x1$ w $\overline{x2}$ w $\overline{x3}$
4	1 0 0	$x1\,\overline{x2}\,\overline{x3}$	$\overline{x1}$ w $x2$ w $x3$
5	1 0 1	$x1\,\overline{x2}\,x3$	$\overline{x1}$ w $x2$ w $\overline{x3}$
6	1 1 0	$x1\,x2\,\overline{x3}$	$\overline{x1}$ w $\overline{x2}$ w $x3$
7	1 1 1	$x1\,x2\,x3$	$\overline{x1}$ w $\overline{x2}$ w $x3$

Bemerkung:
Der Min-/Maxterm korrespondiert zur kleinsten/größten unterscheidbaren Fläche im KV-Diagramm.

- Normalformen

Ziel: Aufstellen der Schaltfunktion für die Ausgangsvariable y anhand der Wahrheitstabelle

Die logische Funktion für y folgt indem entweder

(i) alle Minterme mit y = 1 disjunktiv miteinander verknüpft werden; dies liefert die DNF (Disjunktive Normalform)

oder

(ii) alle Maxterme mit y = 0 konjunktiv miteinander verknüpft werden; dies liefert die KNF (Konjunktive Normalform).

<u>Beachte:</u>
Disjunktive und konjunktive Normalform sind äquivalent (Dualitätsprinzip)!

In der Praxis wird zumeist der Schaltungsentwurf mit der DNF durchgeführt.

Beispiel 1:

$$y \text{ ' } f(x1\ ,\ x2\ ,\ x3) \text{ ' } (x1 \text{ 6 } x2) \text{ v } (\overline{x1} : x3)$$

Wahrheitstabelle:

	$x1$ $x2$ $x3$	$x1$ 6 $x2$	$\overline{x1}$: $x3$	y
0	0 0 0	1	0	0
1	0 0 1	1	1	1
2	0 1 0	1	0	0
3	0 1 1	1	1	1
4	1 0 0	0	1	0
5	1 0 1	0	0	0
6	1 1 0	1	1	1
7	1 1 1	1	0	0

Bilde für alle Zeilen mit y = 1 die Minterme:

	Minterm
1	$\overline{x1}\,\overline{x2}x3$
3	$\overline{x1}x2x3$
6	$x1x2\overline{x3}$

Disjunktive Verknüpfung der Minterme liefert die DNF für y:

$$y = \overline{x1}\,\overline{x2}x3 \lor \overline{x1}x2x3 \lor x1x2\overline{x3} \quad .$$

#

Beispiel 2:

	x1	*x2*	*x3*	*y*	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\overline{x1}\,\overline{x2}x3$
2	0	1	0	1	$\overline{x1}x2\overline{x3}$
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$x1\overline{x2}\,\overline{x3}$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	0	

$\Rightarrow$ DNF:

$$y = \overline{x1}\,\overline{x2}x3 \lor \overline{x1}x2\overline{x3} \lor x1\overline{x2}\,\overline{x3}$$

Alternative Schreibweise:

Das Ergebnis für die DNF läßt sich aufgrund der Gewichtung der Eingangsvariablen auch wie folgt notieren:

$$y \;'\; (1) \;\mathrm{w}\; (2) \;\mathrm{w}\; (4) \quad , \quad y \;'\; \mathrm{w}\,(1\,,\,2\,,\,4) \quad .$$

Beispiel 3:

	$x1$	$x2$	$x3$	y	$\overline{y}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	1

Maxterme

DNF: (disjunktive Verknüpfung der Minterme)

$$y \;'\; \overline{x1}\,\overline{x2}\,x3 \;\mathrm{w}\; \overline{x1}\,x2\,\overline{x3} \;\mathrm{w}\; \overline{x1}\,x2\,x3 \;\mathrm{w}\; x1\,\overline{x2}\,x3 \;\mathrm{w}\; x1\,x2\,\overline{x3}$$

KNF: (konjunktive Verknüpfung der Maxterme)

$$y \;'\; (x1 \;\mathrm{w}\; x2 \;\mathrm{w}\; x3) \;\mathrm{v}\; (\overline{x1} \;\mathrm{w}\; x2 \;\mathrm{w}\; x3) \;\mathrm{v}\; (\overline{x1} \;\mathrm{w}\; \overline{x2} \;\mathrm{w}\; \overline{x3})$$

<u>Beachte:</u>
Die KNF liefert Vorteile, wenn die y-Spalte weniger 0-Werte als 1-Werte enthält!

Die KNF besitzt 3 Maxterme entsprechend einer Realisierung mit 3 ODER- und 1 UND-Gatter;
die DNF umfaßt 5 Minterme und führt auf 5 UND- und 1 ODER-Gatter.

Bemerkung:

Die KNF folgt aus der DNF für die negierte Schaltfunktion

$$\bar{y} \text{ ' } \bar{x}1\bar{x}2\bar{x}3 \text{ w } x1\bar{x}2\bar{x}3 \text{ w } x1x2x3$$

mit Hilfe des Shannonschen Gesetzes

$$\overline{f(x1\ ,\ x2\ ,\ x3\ ;\ \text{w}\ ,\ \text{v})} \text{ ' } f(\bar{x}1\ ,\ \bar{x}2\ ,\ \bar{x}3\ ;\ \text{v}\ ,\ \text{w})$$

zu:

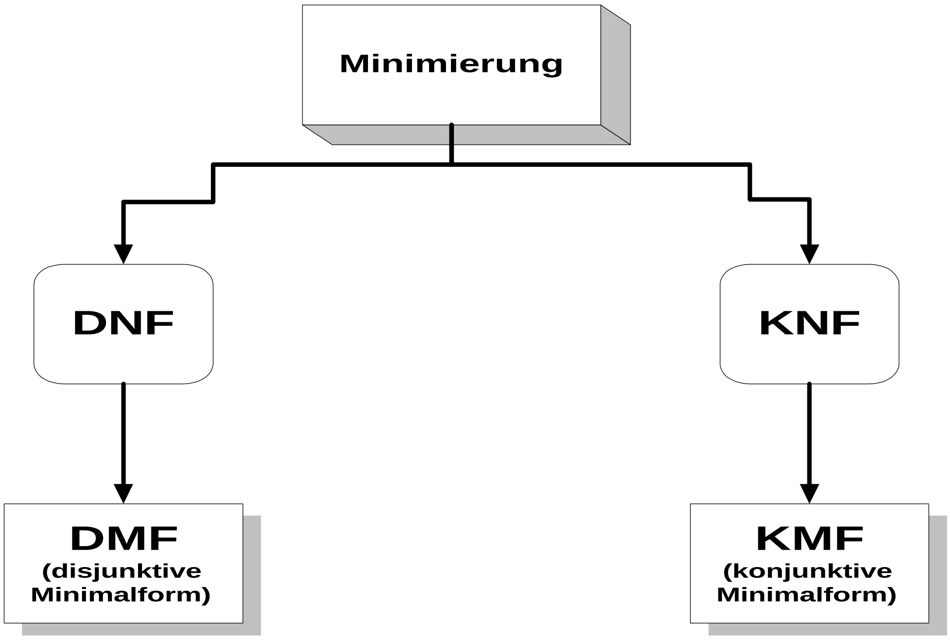
$$y \text{ ' } (x1 \text{ w } x2 \text{ w } x3) \text{ v } (\bar{x}1 \text{ w } x2 \text{ w } x3) \text{ v } (\bar{x}1 \text{ w } \bar{x}2 \text{ w } \bar{x}3) \quad .$$

#

5.8 Minimierung von Schaltfunktionen

In der Praxis ist eine Schaltungsrealisierung anhand der Normalformen oftmals unvorteilhaft, so daß eine Minimierung der logischen Funktion - Elimination der unnötigen Variablen - erhebliche Vereinfachungen liefert.

Die Minimierung der DNF führt auf die disjunktive, minimale Gleichung oder disjunktive Minimalform (DMF); die Minimierung der KNF liefert die konjunktive, minimale Gleichung bzw. die konjunktive Minimalform (KMF).



Wesentliche Aspekte der Minimierung sind:

* es existieren zumeist mehrere gleichwertige Lösungen,
* ein Vergleich der DMF mit der KMF liefert die minimale logische Gleichung,
* die KMF folgt aus der negierten DMF,
* die DMF folgt aus der negierten KMF,
* der Schaltungsaufwand für die KMF und die negierte DMF ist gleich groß, gleiches gilt für die DMF und die negierte KMF.

Beispiel:

Die Minimierung einer Schaltfunktion lieferte
für die **DMF**:

$$' \ ' \ (x1 \ \mathrm{v} \ \overline{x4}) \ \mathrm{w} \ (x1 \ \mathrm{v} \ \overline{x2}) \ \mathrm{w} \ (\overline{x2} \ \mathrm{v} \ \overline{x3}) \ \mathrm{w} \ (\overline{x3} \ \mathrm{v} \ \overline{x4}) \qquad (1$$

und für die **KMF**:

$$y \ ' \ (x1 \ \mathrm{w} \ \overline{x3}) \ \mathrm{v} \ (\overline{x2} \ \mathrm{w} \ \overline{x4}) \qquad (2) \quad .$$

<u>Herleitung der negierten KMF aus der DMF:</u>

Negation der Gleichung (1) bedeutet

$$\overline{y} \ ' \ \overline{(x1 \ \mathrm{v} \ x4) \ \mathrm{w} \ (x1 \ \mathrm{v} \ x2) \ \mathrm{w} \ (x2 \ \mathrm{v} \ x3) \ \mathrm{w} \ (x3 \ \mathrm{v} \ x4)}$$

und das Shannonsche Gesetz liefert mit

$$\overline{y} \ ' \ (\overline{x1} \ \mathrm{w} \ x4) \ \mathrm{v} \ (\overline{x1} \ \mathrm{w} \ x2) \ \mathrm{v} \ (x2 \ \mathrm{w} \ x3) \ \mathrm{v} \ (x3 \ \mathrm{w} \ x4)$$

die **negierte KMF**:

$$' \ \overline{(x1 \ \mathrm{w} \ x4) \ \mathrm{v} \ (x1 \ \mathrm{w} \ x2) \ \mathrm{v} \ (x2 \ \mathrm{w} \ x3) \ \mathrm{v} \ (x3 \ \mathrm{w} \ x4)} \qquad (3$$

<u>Herleitung der negierten DMF aus der KMF:</u>

$$\overline{y} \ ' \ \overline{(x1 \ \mathrm{w} \ x3) \ \mathrm{v} \ (x2 \ \mathrm{w} \ x4)} \quad ,$$

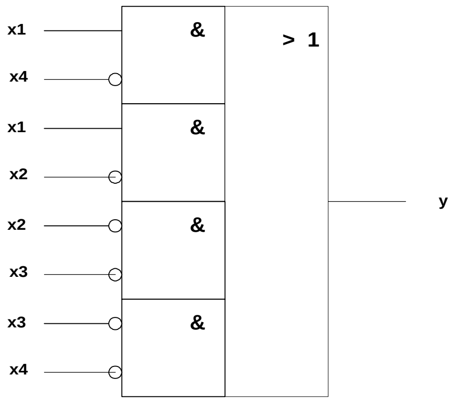
$$\overline{y} \ ' \ (\overline{x1} \ \mathrm{v} \ x3) \ \mathrm{w} \ (x2 \ \mathrm{v} \ x4)$$

Negation von (2) und Shannonsches Gesetz liefern
und somit die **negierte DMF**:

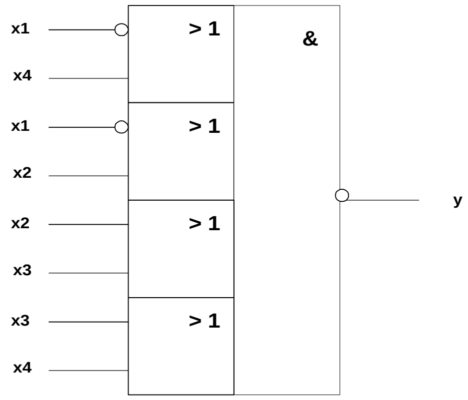
$$y \ ' \ \overline{(x1 \ \mathrm{v} \ x3) \ \mathrm{w} \ (x2 \ \mathrm{v} \ x4)} \qquad (4) \quad .$$

Schaltungstechnische Realisierung:

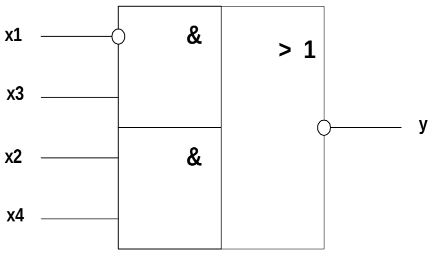
DMF



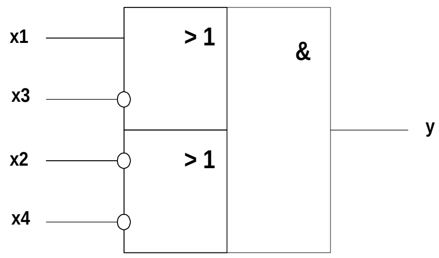
negierte KMF



negierte DMF



KMF



Die disjunktive (konjunktive) Schaltung folgt aus der konjunktiven (disjunktiven) durch Vertauschen der UND- und ODER-Gatter und Negation aller Eingänge sowie des Ausgangs!

#

Minimierungsverfahren

Die wichtigsten Verfahren zur Vereinfachung von Schaltfunktionen sind:

- Algebraische Umformungen

  Mit Hilfe der Regeln 1. - 15. der Booleschen Algebra wird die Gleichung sukzessive vereinfacht.

  Beispiel:

$$y \text{ ' } (\overline{x1} \text{ v } \overline{x2} \text{ v } \overline{x3}) \text{ w } (\overline{x1} \text{ v } x2 \text{ v } \overline{x3}) \text{ w } (x1 \text{ v } \overline{x2} \text{ v } x3) \text{ w } (x1 \text{ v } x2 \text{ v } x3)$$

$$\text{ ' } (\overline{x1} \text{ v } \overline{x3})(\overline{x2} \text{ w } x2) \text{ w } (x1 \text{ v } x3)(\overline{x2} \text{ w } x2)$$

$$\text{ ' } (\overline{x1} \text{ v } \overline{x3}) \text{ w } (x1 \text{ v } x3) \qquad [\textit{Äquivalenz}]$$

#

- Algorithmische Verfahren

  Programme zur Schaltungsminimierung basieren auf algorithmischen Methoden, die nahezu eine beliebig große Anzahl von Variablen verarbeiten können. Das bekannteste Verfahren ist der Quine-McCluskey-Algorithmus.

- Graphische Verfahren

  Karnaugh-Veitch-Diagramme eigen sich für die Minimierung logischer Funktionen bis zu fünf Eingangsvariablen.

Karnaugh-Veitch-Diagramme (KV-Diagramme)

Hiermit können sowohl die DMF als auch die KMF aufgestellt werden; i.f. wird die DMF diskutiert - die KMF folgt mittels Negation und dem Shannonschen Gesetz aus der DMF.

Das KV-Diagramm ist eine alternative schachbrettartige Darstellung der Wahrheitstabelle mit 2^n Feldern für n Eingangsvariablen.

Jedes Feld des KV-Diagramms korrespondiert zu einem Minterm und benachbarte Felder unterscheiden sich nur in einer Eingangsvariablen.

In die einzelnen Felder werden die Werte 0 , 1 oder * der Ausgangsvariablen eingetragen. “*” bedeutet unbestimmter Funktionswert
(redundanter Term, don’t care term) und kann beliebig durch “1" oder “0" ersetzt werden.

Grundprinzip:

Benachbarte 1-Felder lassen sich mit dem Distributiven Gesetz zusammenfassen:

$$(x1\ \text{v}\ x2)\ \text{w}\ (x1\ \text{v}\ \overline{x2})\ '\ x1\ \text{v}\ (x2\ \text{w}\ \overline{x2})\ '\ x1 \quad .$$

Ziel:

Zusammenfassen möglichst vieler benachbarter 1-Felder zu einem Block, wobei die Gesamtzahl der Blöcke im KV-Diagramm zu minimieren ist.

Grundlegende Regeln:

1. Die Werte der Ausgangsvariablen 0, 1 oder * werden für alle 2^n Kombinationen der Eingangsvariablen (2^n Minterme) in die entsprechenden 2^n Felder des KV-Diagramms eingetragen.

2. Benachbarte 1-Felder werden zu einem Block zusammengefaßt, wobei redundante Felder (Lückenfüller) ebenso berücksichtigt werden.

3. Ein Block umfaßt 2^i Felder mit i=0, 1, ..., n.

4. ZweiBlöcke, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, sind benachbart und lassen sich zu einem größeren Block zusammenfassen.

5. Ein 1-Feld oder redundantes Feld kann in verschiedenen Blöcken enthalten sein.

6. Jeder Block wird durch die konjunktive Verknüpfung der zugehörigen Eingangsvariablen beschrieben.

7. Die logische Gleichung folgt mit der disjunktiven Verknüpfung der einzelnen Blöcke.

8. Die resultierende logische Gleichung ist genau dann minimal, wenn die Blöcke maximale Größe besitzen und die Anzahl der Blöcke minimal ist.

Bemerkung:
Das Zusammenfassen der 0-Felder zu Blöcken liefert die negierte DMF und mit dem Shannonschen Gesetz folgt hieraus die KMF.

KV-Diagramm für zwei Eingangsvariablen

	x1	*x2*	*Minterm*
0	0	0	¬x1 ¬x2
1	0	1	¬x1 x2
2	1	0	x1 ¬x2
3	1	1	x1 x2

	x2	**$\overline{x2}$**
x1	3	2
$\overline{x1}$	1	0

Beachte:

x2 (x1) hat die Wertigkeit 2^0 (2^1); die einzelnen Variablen werden außen am KV-Diagramm in fortlaufender Reihenfolge aufgeführt, wobei man mit der Eingangsvariablen, die in der Wahrheitstabelle rechts steht (Wertigkeit 2^0), beginnt und diese am oberen Rand plaziert und anschließend entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Bezeichnung fortschreitet.

Wesentlich für den Aufbau der KV-Diagramme ist die Einschrittigkeit benachbarter Felder!

x1 x2	x1 ¬x2
¬x1 x2	¬x1 ¬x2

Vereinfachungsblöcke:

Block	Zahl der Eingangsvariablen
1 Feld (2^0)	2
2 Felder (2^1)	1
4 Felder (2^2)	0

Beispiel 1:

	x1	x2	y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

DNF:

$$y\ '\ \overline{x1}\,\overline{x2}\ w\ x1\overline{x2}$$

KV-Diagramm:

	X2	¬X2
X1	**0** (3)	**1** (2)
¬X1	**0** (1)	**1** (0)

DMF:

Die Felder 0 und 2 bilden einen Vereinfachungsblock, der nur von ¬x2 abhängt.

	X2	¬X2
X1	**0** (3)	**1** (2)
¬X1	**0** (1)	**1** (0)

ž $y\ '\ \overline{x2}$

Beachte:
Das Zusammenfassen der 0-Felder 1 und 3 liefert die negierte DMF:

$$\overline{y}\ '\ x2 \quad .$$

Beispiel 2:

	x1	x2	y
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	*

DNF:

$$y \text{ ' } x1\overline{x}2$$

KV-Diagramm:

	X2	¬X2
X1	* (3)	1 (2)
¬X1	0 (1)	0 (0)

DMF:

Das Feld 2 und das redundante Feld 3 bilden einen Vereinfachungs-block:

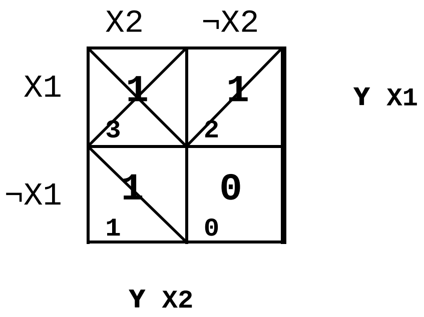
$$y \text{ ' } x1 \quad .$$

#

Beispiel 3:

DNF:

$$y = x1x2 \lor \overline{x1}x2 \lor x1\overline{x2}$$



DMF:

$$y = x1 \lor x2$$

Alternativ lässt sich das Ergebnis natürlich auch anhand algebraischer Umformungen herleiten:

$$y = x1x2 \lor \overline{x1}x2 \lor x1\overline{x2} = x2\,(x1 \lor \overline{x1}) \lor x1\overline{x2} =$$

$$x2 \lor x1\overline{x2} = (x2 \lor \overline{x2}) \land (x2 \lor x1) = x2 \lor x1.$$

#

Beispiel 4:

Sind die 1-Felder diagonal angeordnet, so ist keine Blockbildung möglich; in der logischen Funktion tritt die Antivalenz- bzw. Äquivalenzfunktion auf!

	X2	¬X2
X1	**0** 3	**1** 2
¬X1	**1** 1	**0** 0

$$y \ ' \ x1 \ 7|6 \ x2 \ ' \ \overline{x1}x2 \ w \ x1\overline{x2}$$

	X2	¬X2
X1	**1** 3	**0** 2
¬X1	**0** 1	**1** 0

$$y \ ' \ x1 \ : \ x2 \ ' \ x1x2 \ w \ \overline{x1}\overline{x2} \quad .$$

#

KV-Diagramm für drei Eingangsvariablen

	x1	***x2***	***x3***	***Minterm***
0	0	0	0	¬x1 ¬x2 ¬x3
1	0	0	1	¬x1 ¬x2 x3
2	0	1	0	¬x1 x2 ¬x3
3	0	1	1	¬x1 x2 x3
4	1	0	0	x1 ¬x2 ¬x3
5	1	0	1	x1 ¬x2 x3
6	1	1	0	x1 x2 ¬x3
7	1	1	1	x1 x2 x3

	x3		**¬x3**	
x2	¬x1x2x3 3	7	6	2
¬x2	1	5	x1¬x2¬x3 4	¬x1¬x2¬x3 0
	¬x1	**x1**		**¬x1**

Vereinfachungsblöcke:

Block	Zahl der Eingangsvariablen
1 Feld (2^0)	3
2 Felder (2^1)	2
4 Felder (2^2)	1
8 Felder (2^3)	0

Beispiel 5:

	x1	**x2**	**x3**	**y1**	**y2**
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	*
5	1	0	1	0	*
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0

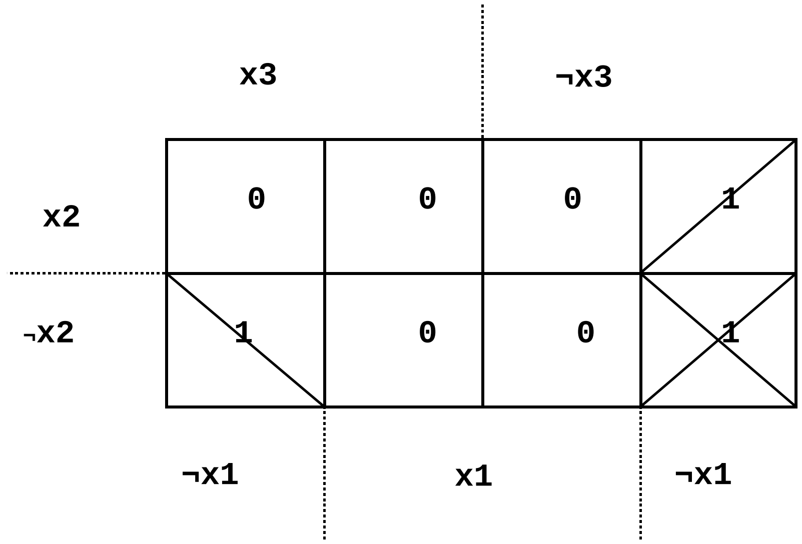
DNF:

$$y1 = \bar{x}1\bar{x}2\bar{x}3 \lor \bar{x}1\bar{x}2x3 \lor \bar{x}1x2\bar{x}3$$

$$y2 = \bar{x}1\bar{x}2\bar{x}3 \lor \bar{x}1\bar{x}2x3 \lor \bar{x}1x2\bar{x}3 \lor x1\bar{x}2\bar{x}3 \lor x1\bar{x}2x3 \,,$$

$y2 = y1$ *plus redundante Terme*: $x1\bar{x}2\bar{x}3$, $x1\bar{x}2x3$

(i) Minimierung für y1:



Zusammenfassen der Felder 2 und 0 (/): $x1x3$

Zusammenfassen der Felder 1 und 0 (\ ): $x1x2$

<u>Beachte:</u>

Am Rand liegende Felder können benachbart sein und zusammengefasst werden!

DMF:

$$y1 = \overline{x1}\,\overline{x2} \vee \overline{x1}\,\overline{x3} \qquad (1)$$

negierte DMF:

Zusammenfassen der 0-Felder
(Felder 4, 5, 6, 7 $\rightarrow$ x1, Felder 3, 7 $\rightarrow$ x2x3)

$\Rightarrow$

$$\overline{y1} = x1 \vee x2x3$$

bzw.

$$y1 = \overline{x1 \vee x2x3} \qquad (2)$$

Schaltungstechnische Realisierung:

(1) erfordert 2 UND- und 1 ODER-Verknüpfung;
(2) erfordert 1 UND- und 1 NOR-Verknüpfung.

Die konjunktiven, minimalen Gleichungen ergeben sich direkt aus den Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe des Shannonschen Gesetzes:

negierte KMF:

(1), Regel 14 Y

$$y1 \text{ ' } \overline{(x1 \text{ w } x2) \text{ v } (x1 \text{ w } x3)} \qquad (1^{)})$$

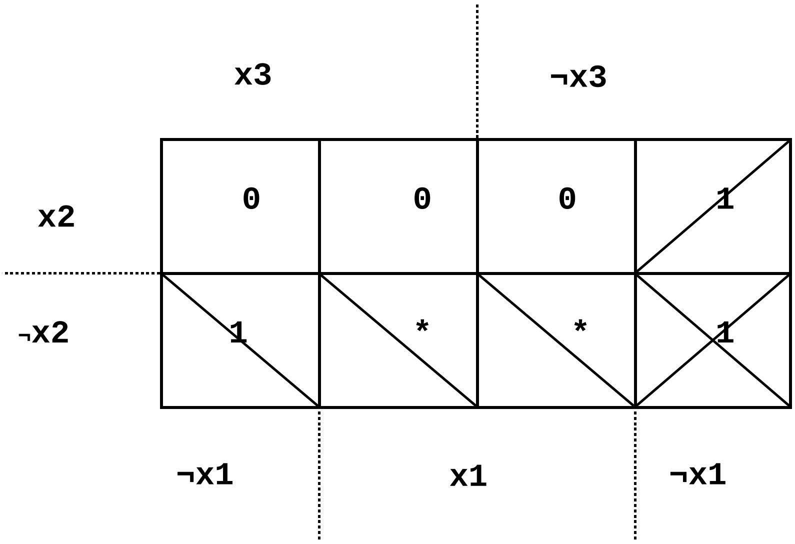
KMF:

(2), Regel 14 Y

$$y1 \text{ ' } \overline{x1} \text{ v } (\overline{x2} \text{ w } \overline{x3}) \qquad (2^{)})$$

(ii) Minimierung für y2:

" * " – " 1 "



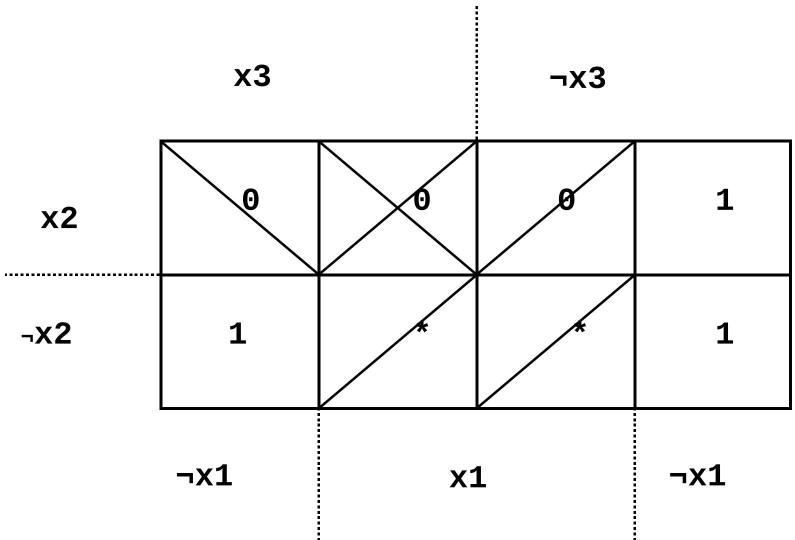
Zusammenfassen der Felder 2 und 0 (/): *x1x3*

Zusammenfassen der Felder 1, 5, 4 und 0 (\ ): *x2*

DMF:

$$y2 = \overline{x2} \vee \overline{x1}\,\overline{x3} \qquad (3)$$

Zusammenfassen der 0-Felder:
" * " – " 0 "



Der Zweierblock (3,7) und der Viererblock (4,5,6,7) liefern:

$$\overline{y2} = x1 \vee x2x3$$

bzw. folgt für die negierte DMF:

$$y2 = \overline{x1 \vee x2x3} \qquad (4)\ .$$

<u>Beachte:</u>
Bezüglich einer technischen Realisierung sind (3) und (4) gleichwertig.

Für die negierte KMF ergibt sich hier:

$$y2 = \overline{x2 \wedge (x1 \vee x3)} \qquad (3')$$

und für die KMF:

$$y2 = \overline{x1} \wedge (\overline{x2} \vee \overline{x3}) \qquad (4')\ .$$

KV-Diagramm für vier Eingangsvariablen

	x1	***x2***	***x3***	***x4***	***Minterm***
0	0	0	0	0	¬x1 ¬x2 ¬x3 ¬x4
1	0	0	0	1	¬x1 ¬x2 ¬x3 x4
2	0	0	1	0	¬x1 ¬x2 x3 ¬x4
.		.			.
.		.			.
.		.			.
14	1	1	1	0	x1 x2 x3 ¬x4
15	1	1	1	1	x1 x2 x3 x4

	X4		¬X4		
X3	**3**	**7**	**6**	**2**	¬X1
	11	**15**	**14**	**10**	X1
¬X3	**9**	**13**	**12**	**8**	
	1	**5**	**4**	**0**	¬X1
	¬X2	X2		¬X2	

Vereinfachungsblöcke:

Block	Zahl der Eingangsvariablen
1 Feld (2^0)	4
2 Felder (2^1)	3
4 Felder (2^2)	2
8 Felder (2^3)	1
16 Felder (2^4)	0

Beispiel 6:

	x1	x2	x3	x4	y1	y2
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
2					1	1
3					0	*
4					0	0
5					0	0
6					0	0
7					0	0
8					0	*
9					0	*
10					1	1
11					1	1
12					0	*
13					0	0
14					0	0
15	1	1	1	1	0	*

DNF:

$$y1 = \overline{x1}\,\overline{x2}\,\overline{x3}\,\overline{x4} \vee \overline{x1}\,\overline{x2}\,\overline{x3}\,x4 \vee \overline{x1}\,\overline{x2}\,x3\,\overline{x4} \vee x1\,\overline{x2}\,x3\,\overline{x4} \vee x1\,\overline{x2}\,x3\,x4$$

$y2 = y1$ *plus redundante Terme*: (3) , (8) , (9) , (12) , (15)

(i) Minimierung für y1:

	X4	X4	¬X4	¬X4	
X3	**0** 3	**0** 7	**0** 6	**1** 2	¬X1
X3	**1** 11	**0** 15	**0** 14	**1** 10	X1
¬X3	**0** 9	**0** 13	**0** 12	**0** 8	X1
¬X3	**1** 1	**0** 5	**0** 4	**1** 0	¬X1
	¬X2	X2	X2	¬X2	

Zusammenfassen der Felder 2 und 10 : *x2x3x4*

Zusammenfassen der Felder 11 und 10 : *x1x2x3*

Zusammenfassen der Felder 1 und 0 : *x1x2x3*

<u>Beachte:</u>
Anstelle der Zusammenfassung der Felder 2 und 10 können alternativ auch die Felder 2 und 0 einen Block bilden!

DMF:

$$y1 \; ' \; \overline{x}2x3\overline{x}4 \; w \; x1\overline{x}2x3 \; w \; \overline{x}1\overline{x}2\overline{x}3 \qquad (1)$$

negierte DMF:

Zusammenfassen der 0-Felder

Y

$$y1 \; ' \; \overline{x2 \; w \; x1x3 \; w \; x1x3x4} \qquad (2)$$

((2) ist schaltungstechnisch günstiger!)

Die konjunktiven, minimalen Gleichungen ergeben sich direkt aus den Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe des Shannonschen Gesetzes:

negierte KMF:

(1), Regel 14 Y

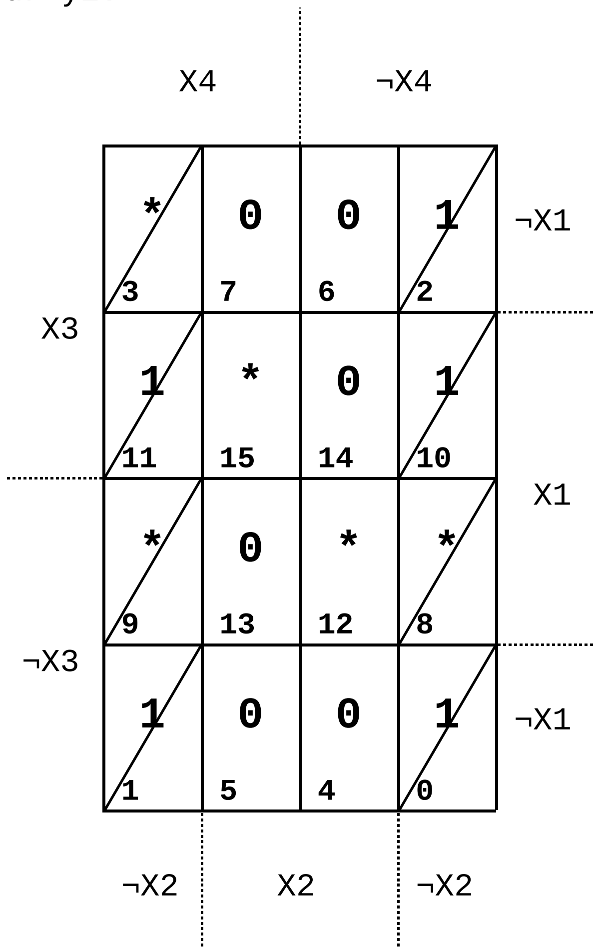
$$y1 \; ' \; \overline{(x2 \; w \; x3 \; w \; x4) \; v \; (x1 \; w \; x2 \; w \; x3) \; v \; (x1 \; w \; x2 \; w \; x3)} \qquad (1^{)})$$

KMF:

(2), Regel 14 Y

$$y1 \; ' \; \overline{x}2 \; v \; (\overline{x}1 \; w \; x3) \; v \; (x1 \; w \; \overline{x}3 \; w \; \overline{x}4) \qquad (2^{)})$$

(ii) Minimierung für y2:



Die Berücksichtigung der redundanten Felder liefert für die minimale logische Funktion:

y2 ' x2 .

KV-Diagramme für fünf Eingangsvariablen:

Die Eingangsvariable X5 ist in der folgenden Wahrheitstabelle das LSB mit einer Wertigkeit 2^0 und X1 korrespondiert zum MSB mit der Wertigkeit 2^4.

	X1	X2	X3	X4	X5	Minterm
0	0	0	0	0	0	¬X1 ¬X2 ¬X3 ¬X4 ¬X5
1	0	0	0	0	1	¬X1 ¬X2 ¬X3 ¬X4 X5
2	0	0	0	1	0	¬X1 ¬X2 ¬X3 X4 ¬X5
3	0	0	0	1	1	¬X1 ¬X2 ¬X3 X4 X5
.			.			.
.			.			.
.			.			.
31	1	1	1	1	1	X1 X2 X3 X4 X5

Aufbau des KV-Diagramms mit Minterm-Nummerierung:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">¬X1</td><td colspan="4">X1</td><td colspan="2">¬X1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">X5</td><td colspan="4">¬X5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">X4</td><td>3</td><td>7</td><td>23</td><td>19</td><td>18</td><td>22</td><td>6</td><td>2</td><td>¬X2</td></tr>
<tr><td>11</td><td>15</td><td>31</td><td>27</td><td>26</td><td>30</td><td>14</td><td>10</td><td rowspan="2">X2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¬X4</td><td>9</td><td>13</td><td>29</td><td>25</td><td>24</td><td>28</td><td>12</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>21</td><td>17</td><td>16</td><td>20</td><td>4</td><td>0</td><td>¬X2</td></tr>
<tr><td></td><td>¬X3</td><td colspan="2">X3</td><td colspan="2">¬X3</td><td colspan="2">X3</td><td>¬X3</td><td></td></tr>
</table>

Allgemein lassen sich hier folgende Vereinfachungsblöcke bilden:

Block	**Zahl der Eingangsvariablen**
1 Feld	5 Eingangsvariablen
2 Felder	4 "
4 "	3 "
8 "	2 "
16 "	1 "
32 "	0 " .

KV-Diagramme für sechs Variablen (64 Minterme) können als ebene oder räumliche Darstellungen gezeichnet werden; ähnlich wie bei fünf logischen Variablen stellt sich die Auswertung als relativ beschwerlich dar - insbesondere können benachbarte Randfelder nur schwer identifiziert werden. In der Praxis verwendet man aus diesem Grunde algorithmische Verfahren zur Schaltungsminimierung wie z.B. das Verfahren von Quine-McCluskey.

<u>Beispiel:</u>

Wahrheitstabelle:

	X1	X2	X3	X4	X5	Y
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0	1
24	1	1	0	0	0	1
			Rest			0

KV-Diagramm:

	¬X1		X1				¬X1		
	X5				¬X5				
X4	**0** 3	**1** 7	**0** 23	**0** 19	**0** 18	**0** 22	**1** 6	**0** 2	¬X2
	0 11	**0** 15	**0** 31	**0** 27	**0** 26	**0** 30	**0** 14	**0** 10	X2
¬X4	**0** 9	**0** 13	**0** 29	**0** 25	**1** 24	**0** 28	**0** 12	**0** 8	
	0 1	**1** 5	**0** 21	**0** 17	**1** 16	**0** 20	**1** 4	**0** 0	¬X2
	¬X3	X3		¬X3		X3		¬X3	

Zusammenfassen (Blocken) der 1-Felder liefert die DMF für Y:

$$Y = X1\ X2\ X3 + X1\ X3\ X4\ X5 \quad .$$

Entsprechend liefert die Blockbildung der 0-Felder die negierte DMF:

$$Y = X1\ X3 + X1\ X2 + X1\ X3 + X1\ X5 + X1\ X4 \quad .$$

Hier bietet sich natürlich eine schaltungstechnische Realisierung der DMF an.

Mit Hilfe des Shannonschen Gesetzes ergeben sich die minimalen konjunktiven Gleichungen:

- negierte KMF

$$Y = (X1 + X2 + X3) \cdot (X1 + X3 + X4 + X5) \quad ,$$

- KMF

$$Y = (X1 + X3) \cdot (X1 + \overline{X2}) \cdot (\overline{X1} + \overline{X3})$$
$$\cdot (\overline{X1} + \overline{X5}) \cdot (\overline{X1} + \overline{X4}) \quad .$$

Schaltungsminimierung a'la Quine-McCluskey

Vorgehensweise:

1. Stellen Sie die Funktion in disjunktiver Normalform dar.

2. Fassen Sie Terme der Form

$$(A \vee \neg x) \text{ und } (A \vee x)$$

   in der DNF zusammen zu A.

   Reduzieren Sie durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens sukzessive die Anzahl der Variablen in den einzelnen Teilausdrücken.

3. Streichen Sie unnötige reduzierte Terme.

Beispiel:

Betrachte die als DNF vorgelegte logische Funktion:

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c,d) = {} & (a \vee b \vee c \vee \neg d) \;\; w \\
& (a \vee b \vee \neg c \vee d) \;\; w \\
& (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \;\; w \\
& (a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \;\; w \\
& (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \;\; w \\
& (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \;\; w \\
& (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \;\; .
\end{aligned}
$$

Tabellarische Auflistung der Vollkonjunktionen:

Zeile	**Gruppe**	**Vollkonjunktion**
1	1	$K_1 := a \vee b \vee c \vee \neg d$
2		$K_2 := a \vee b \vee \neg c \vee d$
3	2	$K_3 := a \vee b \vee \neg c \vee \neg d$
4		$K_4 := a \vee \neg b \vee c \vee \neg d$
5		$K_5 := \neg a \vee \neg b \vee c \vee d$
6	3	$K_6 := a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$
7		$K_7 := \neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d$

Die Basis für die obige Gruppeneinteilung bildet jeweils die Anzahl der negierten Variablen in den einzelnen Mintermen.

Betrachtet man nun benachbarte Gruppen, so unterscheiden sich die Vollkonjunktionen dadurch, daß eine Variable negiert und nichtnegiert auftritt, d.h. Zusammenfassungen in der Form

$$\mathbf{(A\ v\ \neg x)\ w\ (A\ v\ x) = A\ v\ (\neg x\ w\ x) = A\ v\ 1 = A}$$

lassen sich mit Hilfe des Distributivgesetzes der Booleschen Algebra durchführen.

Beispielsweise liefert ein Zusammenfassen der Zeilen 1 und 3 der Tabelle:

$$K_1\ w\ K_3 = (a\ v\ b\ v\ c\ v\ \neg d)\ w\ (a\ v\ b\ v\ \neg c\ v\ \neg d) = a\ v\ b\ v\ \neg d$$
.

Sukzessives Zusammenfassen führt dann auf das Zwischenergebnis:

Zeile				
1 (1,3)	a	b		¬d
2 (4,6)	a	¬b		¬d
3 (1,4)	a		c	¬d
4 (3,6)	a		¬c	¬d
5 (2,3)	a	b	¬c	
6 (5,7)	¬a	¬b	c	
7 (4,7)		¬b	c	¬d

In dieser Tabelle geben die Zahlen in Klammern die Zeilennummern der Zeilen aus der ersten Tabelle an, die zusammengefaßt wurden. Dicke Linien trennen Ausdrücke mit unterschiedlichen Variablen; dünne Linien korrespondieren wiederum zu einer Gruppeneinteilung bezüglich der auftretenden negierten Variablen.

Weitere Zusammenfassungen lassen sich dann nur für Ausdrücke mit gleichem Variableninhalt wie folgt durchführen:

Zeile				
1 (1,2)	a			¬d
2 (3,4)	a			¬d
3 (5)	a	b	¬c	
4 (6)	¬a	¬b	c	
5 (7)		¬b	c	¬d

An dieser Stelle können keine weiteren Zusammenfassungen vorgenommen werden - die Zeilen 3 und 4 in der letzten Tabelle können nicht zusammengefaßt werden, da sie sich in mehreren Variablen bezüglich der Negierung unterscheiden!

Bei doppelt auftretenden Zeilen kann eine gestrichen werden (x w x = x).

Die derart erhaltenen Ausdrücke bezeichnet man als ***reduzierte Terme*** bzw. treffender als ***Primimplikanten***; für das Beispiel ergibt sich:

R_1 = a v ¬d , R_2 = a v b v ¬c R_3 = ¬a v ¬b v c , R_4 = ¬b v cv ¬d,

und es gilt:

$$f(a,b,c,d) = K_1 \text{ w } K_2 \text{ w } K_3 \text{ w } K_4 \text{ w } K_5 \text{ w } K_6 \text{ w } K_7$$

$$= R_1 \text{ w } R_2 \text{ w } R_3 \text{ w } R_4 \quad .$$

Die minimierte Form, die DMF der Funktion f ergibt sich nun über die Bestimmung einer geeigneten Teilmenge der Primimplikanten R_i (i=1,...,4), die zusammen alle Minterme K_i (i=1,...,9) überdecken. Das <u>Streichen unnötiger reduzierter Terme</u> läßt sich anhand der folgenden Tabelle bequem durchführen.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
R_1	*		*	*		*	
R_2		*	*				
R_3					*		*
R_4				*			*

Die matrixförmige Darstellung (2. Quinesche Tabelle) zeigt - angedeutet durch * -, welche Minterme durch die einzelnen Primimplikanten beschrieben werden. Hierzu schaut man sich den Aufbau des Primimplikanten an und alle Minterme mit gleicher Teilstruktur werden durch diesen ersetzt.

Beispielsweise ersetzt

$$R_4 = \neg b \vee c \vee \neg d$$

die Vollkonjunktionen

$$K_4 := a \vee \mathbf{\neg b \vee c \vee \neg d} \quad \text{und} \quad K_7 := \neg a \vee \mathbf{\neg b \vee c \vee \neg d} \ .$$

Insgesamt werden alle Paare (R_i,K_j) mit $i=1,...,4$ und $j=1,...,7$ darauf untersucht, ob der Primimplikant R_i in der Vollkonjunktion K_j enthalten ist, d.h. ob R_i durch Streichen von Variablen in K_j erhalten werden kann. Ist dies gegeben, so wird die zugehörige Kreuzungsstelle in der Tabelle mit einem * makiert.

Betrachtet man beispielsweise den reduzierten Term

$$R_1 = a \vee \neg d \quad ,$$

so überdeckt R_1 die Vollkonjunktionen K_1, K_3, K_4, K_6, wobei die Variablen b und c eliminiert werden; die folgende Tabelle zeigt dies explizit:

R_1	a			¬d
K_1	**a**	b	c	**¬d**
K_2	**a**	b	¬c	d
K_3	**a**	b	¬c	**¬d**
K_4	**a**	¬b	c	**¬d**
K_5	¬a	¬b	c	d
K_6	**a**	¬b	¬c	**¬d**
K_7	¬a	¬b	c	**¬d**

und in der 2. Quineschen Tabelle ist in den entsprechenden Spalten der Zeile R_1 jeweils ein * einzutragen.

Eine Interpretation der 2. Quineschen Tabelle stellt sich nun wie folgt dar:

Befindet sich in der i-ten Spalte an den Schnittpunkten mit den Zeilen $j_1,...,j_p$ (p < 4) jeweils ein * , so impliziert dies, daß wenn der Wert von K_i = 1 ist, ebenfalls die Werte der reduzierten Terme $R_{j1},...,R_{jp}$ gleich 1 sind, d.h. einer dieser reduzierten Terme genügt, um die Vollkonjunktion K_i zu ersetzen - aufgrund der fehlenden Variablen nimmt dieser Primimplikant öfter den Wert 1 an als K_i.

Befindet sich umgekehrt in der i-ten Zeile an den Schnittpunkten mit den Spalten $j_1,...,j_p$ (p < 7) jeweils ein * , so impliziert dies

$$R_i \; ' \; K_{j_1} \; º \; . \; . \; . \; º \; K_{j_p}$$

,d.h. ist R_i = 1, so besitzt mindestens ein K_{jl} (l 0 {1,...,p}) den Wert 1.

Insgesamt bedeutet dies, daß eine Teilmenge der reduzierten Terme derart ausgewählt werden muß, daß in jeder Spalte immer wenigstens ein * berücksichtigt wird!

Befindet sich in einer Spalte nur ein * , so ist der korrespondierende reduzierte Term generell in die Lösung aufzunehmen. Dies bedeutet dann gleichfalls, daß auch alle Spalten, die in der zu diesem reduzierten Term gehörenden Zeile ein * aufweisen ebenfalls berücksichtigt sind und gestrichen werden können.

Allgemein gibt es für die Auswahl, der in die Lösung aufzunehmenden Primimplikaten, verschiedene Möglichkeiten!

Die Menge der Primimplikanten ist eindeutig bestimmt, die DMF kann dagegen äquivalent durch unterschiedliche Lösungen dargestellt werden.

Beim obigen Beispiel mit

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
R_1	*		*	*		*	
R_2		*	*				
R_3					*		*
R_4				*			*

muß R_1 in die Lösung aufgenommen werden, da nur hiermit die Vollkonjunktionen K_1 und K_6 ersetzt werden können; R_2 überdeckt allein K_2 und R_3 ersetzt K_5 und K_7. R_4 wird für die Lösung nicht benötigt, da K_4 und K_7 bereits abgedeckt sind.

Als DMF folgt somit:

$$f(a,b,c,d) = R_1 \text{ w } R_2 \text{ w } R_3 \quad .$$

Die Vorteile des Minimierungsverfahrens von Quine-McCluskey sind:

(i) es handelt sich um ein algorithmisches Verfahren, das als Programm auf einem Rechner ausgeführt werden kann,

(ii) die Anzahl der logischen Variablen ist - im Gegensatz zum KV-Verfahren - beliebig.